
Разработчики заданий приносят свои извинения за допущенную ошибку и благодарят внимательных членов Жюри за своевременное замечание!

Задача 11.5 Найдите все тройки натуральных чисел, для которых выполнено условие: произведение любых двух из них, увеличенное на единицу, делится на оставшееся число.

Решение. Сначала заметим, что среди этих чисел не может быть более одного четного: если a – чётное и хотя бы одно из чисел b или c чётное, то $bc + 1$ – нечётное. Теперь докажем, что эти числа должны быть взаимнопросты. Если это не так, то, допустим, $\text{НОД}(a, b) = m > 1$, тогда $ac + 1$ даёт остаток 1 при делении на m и, следовательно, не может делиться на b . Рассмотрим число $ab + ac + bc + 1$. Оно делится на взаимнопростые числа a, b, c (поскольку по условию произведение любых двух чисел, увеличенное на единицу, делится на третье число), следовательно, оно делится на abc . Тогда выражение

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{abc} \tag{1}$$

должно быть целым числом.

Пусть среди чисел есть 1. Полагая, что $a = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + 1 + \frac{1}{bc} = k,$$

где k – целое число. Далее, если $b = 1$, то находим два решения: $c = 1$ или $c = 2$. Значения $b \geq 3$ и $c \geq 3$ не подходят так как сумма дробных частей будет строго меньше единицы, значит одно из них обязательно равно 2. Тогда при $b = 2$ находим решение $c = 3$.

Пусть теперь все числа a, b, c больше единицы. Докажем, что если все числа больше или равны 3, то решений нет. Вариант $a = b = c = 3$ не подходит, а если хотя бы одно из них будет больше трёх, то сумма дробей будет меньше единицы ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 4} < 1$). Пусть $a = 2$, тогда $\frac{1}{2} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2bc}$ – целое число. Числа b и c нечётны. Если $b \geq 5$ и $c \geq 5$, то решений нет – сумма дробных частей строго меньше единицы. При $b = 3$ находим единственный вариант $c = 7$.

Ответ. только четыре следующих тройки (вплоть до порядка следования элементов в тройке):
(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 7).